Estimation de la pesanteur terrestre par gravimétrie mobile

Q. Li (1,2), B. de Saint-Jean (3), J. Verdun (1), J. Cali (4), M. Diament (2)
(1) IGN/LAREG, GRGS
(2) IPGP – Sorbonne Paris Cité, Géophysique Spatiale et Planétaire, UMR 7154
(3) OCA/Géoazur, UMR 6526, GRGS
(4) ESGT/L2G, GRGS

1. Introduction

Les techniques actuelles de mesure de pesanteur terrestre, depuis les observations spatiales jusqu'aux mesures ponctuelles à la surface, couvrent un large spectre de longueurs d'onde du champ de pesanteur de la Terre. Les données acquises permettent non seulement la réalisation de modèles étendus de géoïde à haute résolution, mais aussi de suivre dans le temps toutes sortes de phénomènes. Cependant, les couvertures spatiale et spectrale des mesures gravimétriques ne sont pas homogènes à la surface de la Terre. Certaines régions difficiles d'accès sont quasiment vierges de toute mesure gravimétrique terrestre. De plus, la gamme des longueurs d'onde intermédiaires (10 à 100 km) est mal couverte par la gravimétrie terrestre à ce jour et n'est pas accessible par gravimétrie spatiale.

C'est dans cet objectif qu'il a été décidé de développer un système de gravimétrie mobile autonome, technique capable de pallier les insuffisances des techniques gravimétriques actuelles. Le système Limo-G (Light moving gravimetry system) est un gravimètre vectoriel absolu, composé de trois accéléromètres (Figure 1) et d'un système GPS à quatre antennes (Figure 2), pouvant être embarqué dans toutes sortes de véhicule (véhicule terrestre, bateau, avion), fiable, ergonomique et peu onéreux *(Cali et al., 2006)*.

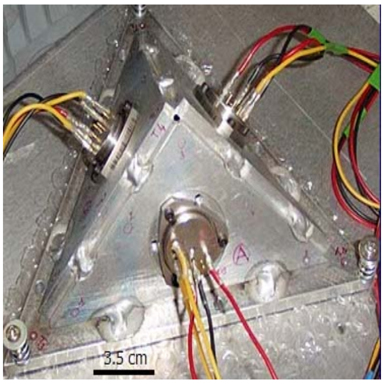

Fig. 1. *Photographie du tétraèdre des accéléromètres.* ***Fig. 2.*** *Vue des quatre antennes du récepteur GPS*

2. Expérimentation du système Limo-G

Le système Limo-G a été expérimenté à deux reprises en conditions réelles au cours de deux levés gravimétriques réalisés en 2006 : (a) un levé routier dans le village de Domfront-en-Champagne, proche du Mans ; (b) un levé marin au large de Sainte-Maxime dans le golfe de Saint-Tropez. Les mesures de cette seconde mission ont été utilisées pour générer des données semi-synthétiques en vue de la validation d'une méthode de traitement par filtrage de Kalman.

Les simulations ont montré que le système Limo-G fonctionne en gravimétrie mobile scalaire avec une précision comprise entre 3 et 4 mGal *(de Saint-Jean, 2008)* et une exactitude de l'ordre du milligal. La précision obtenue est moins bonne que celle annoncée dans les spécifications du système Limo-G (un milligal sur les trois composantes de la pesanteur). Une méthode basée sur les moindres carrés implicites a donc été proposée ; elle sera comparée au filtrage de Kalman.

3. Estimation de la pesanteur par moindres carrés implicites

Le problème de la gravimétrie mobile est de déterminer la pesanteur en un point donné, mobile par rapport à la Terre, à partir de mesures accélérométriques réalisées dans le véhicule porteur, de la position du véhicule à la surface de la Terre et de son orientation. Afin de résoudre ce problème, nous nous appuyons sur la deuxième loi de Newton applicable dans un référentiel inertiel et sur les relations de changements de référentiels pour déterminer l'équation liant la pesanteur à l'accélération mesurée au niveau des accéléromètres.

L'équation de navigation issue de la seconde loi de Newton, adaptée au cas de la gravimétrie mobile, est la suivante :

$$\ddot{X}_{EB}(t) + 2\Omega_{ie}^{e}\dot{X}_{EB}(t) = C_{n}^{e}(t)\delta g^{n}(t) + F^{e}(t) \qquad (1)$$

avec : $F_{e}(t) = C_{n}^{e}(t)g_{LW}^{n}\left(X_{EB}^{e}(t)\right) + C_{n}^{e}(t)C_{b}^{n}(t)C_{s}^{b}(t)a^{s}(t) + M_{B}B^{b}$

- Le premier terme de l'équation (1) correspond à la dérivée seconde de la position dans le référentiel terrestre par rapport au référentiel du véhicule, exprimée dans le référentiel terrestre, $X_{EB}^{e}(t)$.

- $2\Omega_{ie}^{e}\dot{X}_{EB}(t)$ est l'accélération de Coriolis.

- La matrice de passage C_{n}^{e} permet de calculer les coordonnées exprimées dans le référentiel terrestre en fonction de celles exprimées dans le référentiel de navigation.

- F^{e} contient des observations nécessaires pour calculer la perturbation de gravité (la force spéciale a^{s}).

- M_{B} est une matrice qui dépend de la position du véhicule ainsi que de ses mouvements. Le bras de levier (différence entre le point du véhicule où les accélérations sont mesurées et celui dont la position est déterminée) est mesuré dans le référentiel du véhicule par B^{b}.

Selon *(Zwillinger, 1998)*, le vecteur position $X_{EB}^{e}(t)$ peut être exprimé sous la forme d'une équation intégrale :

$$X_{EB}^{e}(t) = X_{EB_s}^{e} + \frac{t-t_s}{t_e-t_s}\left(X_{EB_e}^{e} - X_{EB_s}^{e}\right) + \int_{t_s}^{t_e} W(t,\tau)C_{n}^{e}(\tau)\delta g^{n}(\tau)\,d\tau + \int_{t_s}^{t_e} W(t,\tau)F^{e}(\tau)\,d\tau + \int_{t_s}^{t_e} H(t,\tau)X_{EB}^{e}(\tau)\,d\tau \qquad (2)$$

Le problème est de résoudre cette équation intégrale avec comme inconnue δg, la perturbation de gravité. On effectue un maillage généralement uniforme de pas Δt sur l'intervalle $[t_s,t_e]$. Ainsi, la solution δg est calculée pour les valeurs en progression arithmétique $t_k = t_s + (k-1)\Delta t$, $k = 1, 2, ..., NP$ où NP est le nombre de points.

Dans cette équation, les grandeurs physiques mesurées par notre système sont : les trois composantes du vecteur position $X_{EB}^{e}(t)$ dans le référentiel terrestre, les trois composantes du vecteur attitude (η, χ, α) et les trois composantes de la force spécifique (a^{s}).

Le vecteur d' observations est le suivant (dimension $9NP$) :

$$L_p = [X_{XB}^{e}(t_1^P), ..., X_{XB}^{e}(t_{NP}^P), \eta(t_1^P), ..., \eta(t_{NP}^P), \chi(t_1^P), ..., \chi(t_{NP}^P), \alpha(t_1^P), ..., \alpha(t_{NP}^P), a^s(t_1^P), ..., a^s(t_{NP}^P)]^T$$

Les trois composantes de la perturbation de gravité et les trois composantes du bras de levier sont des paramètres inconnus. Le vecteur des paramètres est donc (dimension $6(NP-2)$, $NP \geq 2$) :

$$X_p = [\delta g^n(t_2^P), ..., \delta g^n(t_{NP-1}^P), B^e(t_2^P), ..., B^e(t_{NP-1}^P)]^T$$

La relation entre les observations et les paramètres peut alors s'écrire: $F(L_p, X_p) = 0_{\mathbb{R}^{3NP}}$. Cette relation correspond à un modèle d'ajustement mixte ; les paramètres peuvent être estimés par la méthode des moindres carrés implicites qui est adaptée lorsque les observations sont liées implicitement aux paramètres. Cette méthode de résolution itérative nécessite également d'ajuster des résidus sur les observations à cause de la linéarisation.

4. Conclusion

La méthode des moindres carrés implicites permet d'estimer le vecteur pesanteur à partir des mesures accélérométriques, de position et d'attitude. Avec cette approche, les composantes du bras de levier sont simplement définies comme des paramètres inconnus. Cette méthode permet également de calculer la matrice de variance-covariance des paramètres estimés. La précision des composantes du vecteur pesanteur estimé peut donc être déterminée à partir des caractéristiques des capteurs.

Cette approche sera implémentée et évaluée sur la campagne de données semi-synthétiques, et sera comparée au filtrage de Kalman.

Pour en savoir plus …

Cali, J., B. de Saint-Jean, J. Verdun, H. Duquenne, S. Melachroinos, J.-P. Barriot (2006) *Un nouveau système lié pour la gravimétrie mobile*. Poster, Journée Gravimétrie Spatiale, CNES.

de Saint-Jean, B. (2008) *Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.

Zwillinger, D. (1998) *Handbook of differential equations*. 3rd edition, Academic press.